

Serie 2

Relationen und Mächtigkeit

Hinweis: Die mit einem Stern gekennzeichneten Aufgaben 3 (b) und 9 sind etwas schwieriger, lösen Sie zunächst die anderen Aufgaben. Jeweils 2 Punkte können Sie für die Aufgaben 1, 3 (a) und 8 bekommen.

Zur Notation: Wir benutzen hier die Schreibweise $\mathcal{P}(X)$ für die Potenzmenge von X .

1. Bestimmen Sie alle möglichen Äquivalenzrelationen auf der Menge $X = \{1, 2, 3\}$ und die entsprechenden Partitionen von X . (2)

2. In dieser Aufgabe behaupten wir fälschlicherweise, dass jede symmetrische und transitive Relation \sim auf einer Menge X auch reflexiv ist (d.h. eine Äquivalenzrelation ist). Finden Sie den Fehler in folgendem „Beweis“:

Sei $x \in X$ ein Element. Sei $y \in X$, so dass $x \sim y$. Wegen Symmetrie der Relation gilt also auch $y \sim x$. Folglich gilt unter Verwendung der Transitivität der Relation $(x \sim y) \wedge (y \sim x) \Rightarrow x \sim x$, was zu zeigen war.

Finden Sie ein Beispiel einer Relation, die symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv ist.

3. (a) Sei \sim eine Äquivalenzrelation auf der Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} derart, dass (2)

$$a \sim (a + 7) \quad \text{und} \quad a \sim (a + 10)$$

für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt. Gilt $1 \sim 2$? Wie viele Elemente hat der Quotient \mathbb{N}/\sim ?

- (b) (Verallgemeinerung von Teil (a)) Seien $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ zwei positive Zahlen und sei \sim die kleinste Äquivalenzrelation (beinhaltet also möglichst wenig Relationen) auf der Menge \mathbb{N} , so dass (*)

$$a \sim (a + d_1) \quad \text{und} \quad a \sim (a + d_2)$$

für alle $a \in \mathbb{N}$. Wie viele Elemente hat der Quotient \mathbb{N}/\sim ? Tipp: Googlen Sie *Lemma von Bézout*.

Tatsächlich sind die Eigenschaften der Reflexivität, der Symmetrie und der Transitivität einer Relation vollständig unabhängig voneinander und müssen alle einzeln überprüft werden. So ist zum Beispiel eine symmetrische und transitive Relation nicht automatisch schon reflexiv, siehe Aufgabe 2. Für jeden der acht möglichen Fälle (keine der drei Eigenschaften ist erfüllt, genau eine oder genau zwei der drei Eigenschaften sind erfüllt, oder alle drei Eigenschaften sind erfüllt) können Sie Beispiele angeben, die diese Unabhängigkeit der drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation zeigen. In der folgenden Aufgabe behandeln wir drei dieser acht Fälle.

4. Finden Sie je ein Beispiel für eine Relation auf den natürlichen Zahlen \mathbb{N} , die von den Eigenschaften einer Äquivalenzrelation

1. nur die Symmetrie,
2. nur die Transitivität,
3. die Reflexivität und die Transitivität, aber nicht die Symmetrie

erfüllt.

5. Zeigen Sie, dass es eine Bijektion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{5\}$ gibt.

6. (a) Zeigen Sie mit Hilfe eines Bildes, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar unendlich ist.
(b) Zeigen Sie, dass \mathbb{N}^k abzählbar unendlich ist für alle $k \in \mathbb{N}$.

7. Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen, wobei I eine abzählbar unendliche Menge ist und jede der Mengen A_i abzählbar unendlich ist. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{i \in I} A_i$ abzählbar unendlich ist.
8. Es bezeichne $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ die Menge aller *endlichen* Teilmengen von \mathbb{N} . Ist die Menge $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ abzählbar? (2)
 Tipp: Eine Art dies zu zeigen, ist zu benutzen, dass jede endliche Menge $X \subset \mathbb{N}$ ein *Maximum* besitzt, d.h. es existiert ein Element $x \in X$, sodass $n \leq x$ für alle $n \in X$ gilt. Dies werden Sie später in der Analysis-Vorlesung sehen, können Sie aber auch durch Induktion zeigen.
9. Zeigen Sie $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Zeigen Sie dazu zunächst (*)
 (a) $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}|$ und
 (b) $|(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\})| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})|$
 und folgern Sie dann die Behauptung.
10. Seien A, B und C Mengen. Dann ist $A^B = \{f \mid f: B \rightarrow A \text{ ist eine Funktion}\}$. Zeigen Sie ohne Verwendung von Cantor-Schröder-Bernstein, sondern durch das Finden einer Bijektion, dass
 (a) $|A^{B \cup C}| = |A^B \times A^C|$, falls $B \cap C = \emptyset$, und
 (b) $|(A^B)^C| = |A^{B \times C}|$. Hierbei ist $(A^B)^C$ die Menge aller Funktionen $f: C \rightarrow A^B$, sodass für jedes $c \in C$ das Bild $f(c)$ eine Funktion $B \rightarrow A$ ist.